



Универзитет у Источном Сарајеву  
Електротехнички факултет

**НАТАША ПАВЛОВИЋ**

**ЗБИРКА РИЈЕШЕНИХ  
ЗАДАТАКА ИЗ  
МАТЕМАТИКЕ ЗА  
ПРИЈЕМНИ ИСПИТ**

Источно Сарајево, 2007. године

## ПРЕДГОВОР

Збирка задатака је првенствено намијењена кандидатима који се припремају за студиј електротехнике, а корисно ће послужити студентима Електротехничког факултета у Источном Сарајеву за савладавање градива из предмета Математика I. Њоме се могу користити и сви кандидати који се припремају за студиј на другим факултетима на којима се полаже квалификациони испит из математике.

У збирку су уврштени задаци са вјежби из елементарне математике са припремне наставе на Електротехничком факултету у Источном Сарајеву, као и неки задаци из досадашњих тестова са полагања квалификационих испита на овом факултету.

Захваљујем се проф. др Вељку Вулетићу и проф. др Зорану Љубоју, те асистентима Наташи Поповић, Мирославу Глигорићу и Драгани Глигорић на помоћи и сугестијама које су ми давали при изради ове збирке.

Аутор

Источно Сарајево, 2007. године

## САДРЖАЈ

1. ТРАНСФОРМАЦИЈА ИЗРАЗА.....	3
2. ЈЕДНАЧИНЕ, НЕЈЕДНАЧИНЕ И СИСТЕМИ .....	9
3. ТРИГОНОМЕТРИЈА .....	22
4. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ И ЛОГАРИТАМСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ, НЕЈЕДНАЧИНЕ И СИСТЕМИ.....	33
5. АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА.....	44
6. ЗАДАЦИ ЗА ВЈЕЖБУ .....	51
ЛИТЕРАТУРА .....	55

## 1. ТРАНСФОРМАЦИЈА ИЗРАЗА

### 1. Упростити израз

$$\frac{ab^{-2}(a^{-1}b^2)^4(ab^{-1})^2}{a^{-2}b(a^2b^{-1})^3a^{-1}b},$$

а затим одредити вриједност израза за  $a=10^{-3}$  и  $b=-10^{-2}$ .

#### Рјешење:

Дати израз је дефинисан за  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

$$\frac{ab^{-2}a^{-4}b^8a^2b^{-2}}{a^{-2}ba^6b^{-3}a^{-1}b} = \frac{a^{-1}b^4}{a^3b^{-1}} = \frac{b^5}{a^4}.$$

За  $a=10^{-3}$  и  $b=-10^{-2}$  вриједност израза је

$$\frac{(-10^{-2})^5}{(10^{-3})^4} = \frac{-10^{-10}}{10^{-12}} = -100.$$

### 2. Одредити вриједност разломка

$$\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}.$$

#### Рјешење:

$$\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}} = 2-1=1.$$

### 3. Поједноставити сљедећи израз

$$\frac{\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x} - \sqrt{m-x}}$$

ако је  $x=2mn/(n^2+1)$ ,  $m>1$  и  $0<n<1$ .

#### Рјешење:

$$\frac{\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x} - \sqrt{m-x}} \cdot \frac{\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x}} = \frac{m+x+2\sqrt{m^2-x^2}+m-x}{m+x-m+x} = \frac{2m+2\sqrt{m^2-x^2}}{2x} = \frac{m+\sqrt{m^2-x^2}}{x}.$$

Ако у овај израз уврстимо  $x=2mn/(n^2+1)$ , тада добијамо следећи израз:

$$\begin{aligned} & \frac{m + \sqrt{m^2 - \frac{4m^2 n^2}{(n^2+1)^2}}}{\frac{2mn}{n^2+1}} = \frac{m(n^2+1) + \sqrt{m^2 n^4 + 2m^2 n^2 + m^2 - 4m^2 n^2}}{2mn} = \\ & = \frac{m(n^2+1) + \sqrt{m^2(n^2-1)^2}}{2mn} = \frac{m(n^2+1) + |m(n^2-1)|}{2mn}. \end{aligned}$$

За  $m>1$  и  $0<n<1$  имамо да је  $m(n^2-1)<0$ , па горњи израз добија облик:

$$\frac{m(n^2+1) - m(n^2-1)}{2mn} = \frac{1}{n}.$$

#### 4. Да ли је исправна пропорција

$$\frac{6acm^2 - 18acm}{4a^2m^4 - 108a^2m} : \frac{15ac^2m + 45ac^2}{24a^3m + 72a^3} = \frac{4a^2b^2cm - 12a^2b^2c}{3b^2c^3m - 9b^2c^3} : \frac{5ab^2m^4 - 135ab^2m}{9b^2cm^2 - 27b^2cm} ?$$

**Рјешење:**

$$\begin{aligned} & \frac{6acm(m-3)}{4a^2m(m^3-27)} : \frac{15ac^2(m+3)}{24a^3(m+3)} = \frac{4a^2b^2c(m-3)}{3b^2c^3(m-3)} : \frac{5ab^2m(m^3-27)}{9b^2cm(m-3)} \\ & \frac{3c}{2a(m^2+3m+9)} : \frac{5c^2}{8a^2} = \frac{4a^2}{3c^2} : \frac{5a(m^2+3m+9)}{9c} \\ & \frac{3c}{2a(m^2+3m+9)} \cdot \frac{5a(m^2+3m+9)}{9c} = \frac{5c^2}{8a^2} \cdot \frac{4a^2}{3c^2} \\ & \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Пропорција је исправна.

#### 5. Упростити израз

$$\sqrt[4]{1+2x+x^2} \sqrt{\frac{x^4+x^5}{x^2-1}} \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}.$$

**Рјешење:**

Израз је дефинисан за  $x \neq 0$  и  $x \neq \pm 1$ .

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x^4(x+1)}{x^2-1}} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^4}} = \sqrt[4]{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x^4(x+1)}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^4}} = \\ & = \sqrt[4]{(x+1)^2} \sqrt{x+1} = \sqrt{x+1} \sqrt{x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| \end{aligned}$$

## 6. Упростити израз

$$\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}} + \frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}.$$

**Рјешење:**

$$\begin{aligned} & \frac{\left(x+2+\sqrt{x^2-4}\right)^2}{(x+2)^2-x^2+4} + \frac{\left(x+2-\sqrt{x^2-4}\right)^2}{(x+2)^2-x^2+4} = \\ & \frac{(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x^2-4}+x^2-4}{4x+8} + \frac{(x+2)^2-2(x+2)\sqrt{x^2-4}+x^2-4}{4x+8} \\ & = \frac{2x^2+8x+8+2x^2-8}{4x+8} = x. \end{aligned}$$

## 7. Упростити израз

$$\frac{\sqrt{(a+x)(b+x)} + \sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}}, \quad (x = \sqrt{ab}, a > 0, b > 0).$$

**Рјешење:**

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\sqrt{(a+x)(b+x)} + \sqrt{(a-x)(x-b)}\right)^2}{(a+x)(x+b) - (a-x)(x-b)} = \frac{2ax + 2bx + 2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}{2ab + 2x^2} \\ & = \frac{ax + bx + \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}{ab + x^2} \end{aligned}$$

Уврстимо  $x = \sqrt{ab}$

$$\frac{a\sqrt{ab} + b\sqrt{ab} + \sqrt{(a^2-ab)(ab-b^2)}}{2ab} = \frac{\sqrt{ab}(a+b) + \sqrt{ab}|a-b|}{2ab}$$

$$1^\bullet \quad a-b > 0 \Rightarrow a > b$$

$$\frac{\sqrt{ab}(a+b) + \sqrt{ab}(a-b)}{2ab} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

$$2^\bullet \quad a-b < 0 \Rightarrow a < b$$

$$\frac{\sqrt{ab}(a+b-a+b)}{2ab} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$$

$$3^\bullet \quad a=b \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2} 2a}{2a^2} = 1$$

## 8. Упростити израз

$$\left[ \frac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} - (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}} \right]^{-2}, \quad \left( x = \left[ \frac{p^2+q^2}{2pq} \right]^{\frac{1}{2}}, p > q, pq \neq 0 \right).$$

*Рјешење:*

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \right]^{-2} = \left[ \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}} \right]^2 = \left[ \frac{2x^2 - 2\sqrt{x^4-1}}{-2} \right]^2 = (x^2 - \sqrt{x^4-1})^2 \\ & = 2x^4 - 2x^2\sqrt{x^4-1} - 1 \\ & = 2 \left[ \left( \frac{p^2+q^2}{2pq} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^4 - 2 \left[ \left( \frac{p^2+q^2}{2pq} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \sqrt{\left[ \left( \frac{p^2+q^2}{2pq} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^4 - 1} - 1 \\ & = \frac{(p^2+q^2)^2}{2p^2q^2} - \frac{(p^2+q^2)}{pq} \sqrt{\frac{(p^2-q^2)^2}{4p^2q^2}} - 1 \\ & = \frac{(p^2+q^2)^2}{2p^2q^2} - \frac{(p^2+q^2)(p^2-q^2)}{2p^2q^2} - 1 = \frac{q^2}{p^2}. \end{aligned}$$

## 9. Трансформисати следећи израз

$$\frac{a^2-1}{n^2+an} \left( \frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1 \right) \cdot \frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}.$$

*Рјешење:*

$$\begin{aligned} & \frac{a^2-1}{n^2+an} \left( \frac{n}{n-1} - 1 \right) \cdot \frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2} = \frac{a^2-1}{n^2+an} \cdot \frac{n-n+1}{n-1} \cdot \frac{-a+an^3+n^4-n}{a^2-1} = \\ & \frac{-(a+n)+n^3(a+n)}{n(n+a)(n-1)} = \frac{(a+n)(n^3-1)}{n(a+n)(n-1)} = \frac{n^2+n+1}{n}. \end{aligned}$$

**10. Упростити израз:**

$$\left[ x - \left( \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} + \frac{3}{x^2-x+1} \right) \left( x - \frac{2x-1}{x+1} \right) \right] (x^2+x+1).$$

**Рјешење:**

$$\begin{aligned} \left( x - \frac{x^2-x+1-3+3x+3}{x^3+1} \cdot \frac{x^2+x-2x+1}{x+1} \right) (x^2+x+1) &= \left( x - \frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x+1} \right) (x^2+x+1) \\ &= (x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1. \end{aligned}$$

**11. Упростити израз**

$$\left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) \cdot \frac{x^4 - 2x^3 + 8x - 16}{4} - 2x.$$

**Рјешење:**

$$\begin{aligned} \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x^3(x-2)+8(x-2)}{4} - 2x &= \frac{4}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x^3+8)}{4} - 2x \\ &= \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} - 2x = x^2 - 2x + 4 - 2x = (x-2)^2. \end{aligned}$$

**12. Упростити израз**

$$\frac{2a}{a^2-4x^2} + \frac{1}{2x^2+6x-ax-3a} \cdot \left( x + \frac{3x+6}{x+2} \right)$$

**Рјешење:**

$$\begin{aligned} \frac{2a}{a^2-4x^2} + \frac{1}{2x^2+6x-ax-3a} \cdot \left( x + \frac{3x+6}{x+2} \right) &= \\ \frac{2a}{(a-2x)(a+2x)} + \frac{1}{2x(x+3)-a(x+3)} \cdot \left( x + \frac{3(x+2)}{x+2} \right) &= \\ \frac{2a}{(a-2x)(a+2x)} + \frac{1}{(x+3)(2x-a)} \cdot (x+3) &= \\ \frac{2a}{(a-2x)(a+2x)} - \frac{1}{a-2x} = \frac{2a-a-2x}{(a-2x)(a+2x)} = \frac{1}{a+2x} \end{aligned}$$

за  $x \neq -a/2$ .



### 13. Упростити израз

$$\left( \frac{a}{a^2 - 4a + 4} - \frac{a}{4 - a^2} - \frac{2}{a + 2} \right) \frac{a^3 - 2a^2 - 4a + 8}{a^2 - 1}.$$

**Рјешење:**

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a}{(a-2)^2} + \frac{a}{a^2-4} - \frac{2}{a+2} \right) \cdot \frac{a^2(a-2) - 4(a-2)}{a^2-1} = \frac{a(a+2) + a(a-2) + 2(a-2)^2}{(a-2)(a^2-4)} \cdot \frac{(a-2)(a^2-4)}{a^2-1} \\ & = \frac{4(a^2 - a + 1)}{a^2 - 1} = \frac{4(a-1)}{a+1} \end{aligned}$$

За  $a \neq -1$ .

## 2. ЈЕДНАЧИНЕ, НЕЈЕДНАЧИНЕ И СИСТЕМИ

### 1. Ријешити једначину:

$$\frac{1}{nx-n^2} - \frac{1}{mn-mx} = \frac{1}{mn-nx} - \frac{1}{mx-m^2}.$$

*Рјешење:*

Једначина је дефинисана за  $m, n \neq 0 \wedge x \neq m \wedge x \neq n$ .

$$\frac{1}{n(x-n)} - \frac{1}{m(n-x)} = \frac{1}{n(m-x)} - \frac{1}{m(x-m)}$$

$$\frac{m+n}{mn(x-n)} = \frac{m+n}{nm(m-x)}$$

$$x-n = m-x \Rightarrow x = \frac{m+n}{2}$$

### 2. Ријешити једначину

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x+1} \left( \frac{1}{x-1} + 1 \right).$$

*Рјешење:*

Дефиниционо подручје:  $x \neq \pm 1$ , тј.  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

$$\frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{4}{x+1} \cdot \frac{1+x-1}{x-1}$$

$$\frac{4x}{x^2 - 1} = \frac{4x}{x^2 - 1}$$

$$4x = 4x$$

Рјешење је  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , тј. једначина је неодређена.

### 3. Ријешити једначину

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x+2}} = \frac{7}{12}.$$

*Рјешење:*

Дефиниционо подручје:  $\frac{x+2}{2x+2} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$

Уводимо смјену  $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = t$ .

$$t - \frac{1}{t} = \frac{7}{12}$$

$$12t^2 - 7t - 12 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm 25}{24}$$

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = \frac{4}{3}$$

$$18x+18 = 16x+32$$

$$x = 7$$

$$t_1 = \frac{4}{3}$$

$$t_2 = -\frac{3}{4} \left( \text{Како је } t = \sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} > 0, \text{ рјешење } t_2 \text{ отпада.} \right)$$

**4. За које  $\alpha$  из скупа реалних бројева рјешења квадратне једначине**

$$2x^2 - \alpha x + 6 = 0 \text{ су:}$$

**а) реална и различита,**

**б) реална и једнака,**

**в) комплексна?**

**Рјешење:**

Дискриминанта једначине је  $D = \alpha^2 - 48$ .

$$\text{а) } D > 0 \Rightarrow \alpha^2 - 48 > 0 \Rightarrow (\alpha - 4\sqrt{3})(\alpha + 4\sqrt{3}) \Rightarrow \alpha \in (-\infty, -4\sqrt{3}) \cup (4\sqrt{3}, +\infty)$$

$$\text{б) } D = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 48 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm 4\sqrt{3}$$

$$\text{в) } D < 0 \Rightarrow \alpha^2 - 48 < 0 \Rightarrow \alpha \in (-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$$

**5. Одредити све вриједности параметра  $m$  за које је квадратни тринوم  $mx^2 - 4mx + m^2 + 2m - 3$  позитиван за све вриједности промјенљиве  $x$ .**

**Рјешење:**

Знамо да је  $ax^2 + bx + c > 0$  за  $\forall x \in \mathbb{R}$  ако су задовољени услови да је  $a > 0$  и  $D < 0$ .

$$D = 16m^2 - 4m(m^2 - 2m - 3) = -4m^3 + 8m^2 + 12m < 0$$

$$-4m(m^2 - 2m - 3) < 0$$

Из услова  $a > 0$  слиједи  $m > 0$ , а то значи да је  $m^2 - 2m - 3 > 0$ .

$$m^2 - 2m - 3 > 0$$

$$(m+1)(m-3) > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

Због  $m > 0$  слиједи да је рјешење  $m \in (3, +\infty)$ .

**6. Дата је једначина  $x^2 - 2(a+1)x + 3a + 2 = 0$ . Дискутовати реалност рјешења.**

**Рјешење:**

$$D = 4(a+1)^2 - 4(3a+2) = 4a^2 - 4a - 4 = 4(a^2 - a - 1)$$

$$D = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ рјешења реална и једнака.}$$

$$D > 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right), \text{ у том случају су рјешења реална и различита.}$$

7. Дата је једначина  $7(m+x)-11=m^2-4+3(x+1)$ . Одредити параметар  $m$  тако да рјешење дате једначине буде негативно.

**Рјешење:**

$$7m+7x-11=m^2-4+3x+3$$

$$4x=m^2-7m+10$$

$$x=(m^2-7m+10)/4$$

$$\text{За } x < 0 \Rightarrow m^2-7m+10 < 0 \Rightarrow (m-2)(m-5) < 0. \text{ Рјешење једначине је } m \in (2,5).$$

8. За које вриједности једначина  $x^4(a+3)-4ax^2+(1-a)=0$  (1) нема реална рјешења?

**Рјешење:**

$$\text{Смјена: } x^2=t$$

$$t^2(a+3)-4at+1-a=0 \quad (2)$$

Једначина нема реална рјешења ако је  $D < 0$ .

$$D=16a^2-4(a+3)(1-a)=20a^2+8a-12 < 0 \Rightarrow a \in (-1, 3/5).$$

Сада одредимо оне вриједности  $a$  за које су оба рјешења  $t_1$  и  $t_2$  једначине (2) негативна (да једначина (1) не би имала реална рјешења). Ако су  $t_1, t_2 < 0$ , према Виетовим формулама је:

$$t_1 + t_2 = 4a/(a+3) < 0 \wedge t_1 t_2 = (1-a)/(a+3) > 0.$$

$$4a/(a+3) < 0 \Rightarrow a \in (-3, 0)$$

$$(1-a)/(a+3) > 0 \Rightarrow a \in (-3, 1)$$

Рјешење је  $a \in (-3, 0)$ , што заједно са  $a \in (-1, 3/5)$  даје  $a \in (-3, 3/5)$ .

9. Дата је једначина  $x^2+4tx-4(t+1)=0$ . Наћи све вриједности параметра  $t$  за које ова једначина има реална рјешења.

**Рјешење:**

$$D \geq 0$$

$$D=16t^2+16(t+1) \Rightarrow t^2+t+1 \geq 0, \text{ а то је позитивно } \forall t \in \mathbb{R}.$$

10. Дата је једначина  $x^2+4tx+2(t+1)=0$ . Наћи све вриједности параметра  $t$  за које ова једначина има реална рјешења.

**Рјешење:**

$$D \geq 0$$

$$D=16t^2-8(t+1) \Rightarrow 2t^2-t-1 \geq 0$$

$$t_1=1, t_2=-1/2$$

Рјешење је:  $t \in (-\infty, -1/2] \cup [1, +\infty)$ .

11. Одредити све вриједности параметра  $p$ , тако да коријени једначине  $x^2 - 3px + p^2 = 0$  задовољавају услов

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{7}{4}.$$

**Рјешење:**

По Виетовим формулама, за једначину  $ax^2 + bx + c = 0$  важи  $x_1 + x_2 = -b/a$ ,  $x_1 x_2 = c/a$ .  
У нашем случају је  $x_1 + x_2 = 3p$ ,  $x_1 x_2 = p^2$ .  
Одавде ће бити :

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{7}{4}$$

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = \frac{7}{4}$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{7}{4}$$

$$(3p)^2 - 2p^2 = \frac{7}{4}$$

$$7p^2 = \frac{7}{4}$$

$$p^2 = 1/4 \Rightarrow p_1 = 1/2, p_2 = -1/2$$

12. Ријешити једначину

$$\frac{(a-x)^3 + (b-x)^3}{(a-x)^2 - (b-x)^2} = a - b.$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $(a-x)^2 \neq (b-x)^2 \Leftrightarrow a-x \neq b-x \wedge a-x \neq b+x \Rightarrow a \neq b \wedge x \neq (a+b)/2$ .

$$\frac{(a-x+b-x)[(a-x)^2 - (a-x)(b-x) + (b-x)^2]}{(a-x+b-x)(a-x-b+x)} = a - b$$

$$a^2 - 2ax + x^2 - ab + ax + bx - x^2 + b^2 - 2bx + x^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} = \frac{a+b \pm |a-b|}{2}$$

$$1^\circ \quad a - b > 0$$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = b$$

$$2^\circ \quad a - b < 0$$

$$x_1 = b$$

$$x_2 = a$$

13. Наћи све вриједности параметра  $t$  за које је неједначина

$$\frac{1}{(t+1)x^2 + 4tx + t - 3} < 0$$

задовољена за свако реално  $x$ .

**Рјешење:**

$$(t+1)x^2 + 4tx + t - 3 < 0$$

$$t+1 < 0 \wedge D = 16t^2 - 4(t+1)(t-3) < 0$$

$$3t^2 + 2t + 3 < 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-32}}{6} \text{ - нема реалне нуле } \Rightarrow 3t^2 + 2t + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Не постоји  $t \in \mathbb{R}$  тако да је неједначина задовољена  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

14. За коју вриједност параметра  $k \in \mathbb{R}$  је задовољена неједначина  $kx^2 + 3kx + k + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ?

*Рјешење:*

$$k > 0 \wedge D < 0$$

$$D = b^2 - 4ac = k(5k - 8)$$

$$\text{Како је } k > 0 \Rightarrow 5k - 8 < 0 \Rightarrow k \in \left[0, \frac{8}{5}\right)$$

15. За које вриједности параметра  $m \in \mathbb{R}$  важи неједнакост

$$\frac{-3}{mx^2 + 2mx - m^2 + 2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} ?$$

*Рјешење:*

$$mx^2 + 2mx - m^2 + 2 > 0$$

$$m > 0 \wedge D < 0$$

$$\text{Како је } m > 0 \Rightarrow m^2 + m - 2 < 0$$

$$m \in (-2, 1)$$

$$D = 4m(m^2 + m - 2)$$

$$\text{Рјешење је } m \in [0, 1).$$

16. За коју вриједност параметра  $k \in \mathbb{R}$  важи неједначина

$$\frac{-2}{kx^2 + 2kx - k^2 + 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} ?$$

*Рјешење:*

$$kx^2 + 2kx - k^2 + 2 < 0 \Rightarrow k < 0 \wedge D < 0$$

$$D = 4k^2 - 4k(-k^2 + 2) = 4k(k^2 + k - 2) < 0 \Rightarrow k^2 + k - 2 > 0$$

$$k_1 = 1, k_2 = -2 \Rightarrow k \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{због } k < 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -2)$$

17. За које  $m$  је тачна неједначина

$$mx^2 - 2mx + m^2 - 2 < 0?$$

*Рјешење:*

$$m \leq 0 \wedge D < 0$$

$$D = 4m^2 - 4m(m^2 - 2) = 4m(m - m^2 + 2) < 0$$

$$\text{Како је } m < 0 \Rightarrow -m^2 + m + 2 > 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$m_1 = -1, m_2 = 2$$

$$m \in (-1, 2)$$

$$\text{Рјешење је } m \in (-1, 0].$$

**18. Наћи сва рјешења једначине**

$$x|x-4| = 3(x-2), \quad x \in \mathbf{R}.$$

**Рјешење:**

а)  $x-4 \geq 0 \Rightarrow x \in [4, +\infty)$

$$x^2 - 4x = 3x - 6$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 1$$

б)  $x-4 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 4)$

$$-x^2 + 4x = 3x - 6$$

$$-x^2 + x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2}$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 3$$

Рјешења једначине су:  $x = -2, x = 3, x = 6$ .

**19. Ријешити неједначину**

$$|x+1| - |x-2| < 3, \quad x \in \mathbf{R}.$$

**Рјешење:**

		-1	2
$x+1$	-	+	+
$x-2$	-	-	+

На основу табеле имамо следеће:

а)  $x \in (-\infty, -1]$

$$-x - 1 + x - 2 < 3$$

$$-3 < 3$$

$$R_1 : x \in (-\infty, -1]$$

б)  $x \in (-1, 2]$

$$x + 1 + x - 2 < 3$$

$$x < 2$$

$$R_2 : x \in (-1, 2)$$

в)  $x \in (2, +\infty)$

$$x + 1 - x + 2 < 3$$

$$3 < 3$$

Рјешење је  $x \in (-\infty, 2)$ .

**20. Ријешити неједначину**

$$|x+2| - |x-1| < x - \frac{3}{2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

**Рјешење:**

		-2	1
$x+2$	-	+	+
$x-1$	-	-	+

а)  $x \in (-\infty, -2]$

$$-x-2+x-1 < x-\frac{3}{2}$$

$$x > -\frac{3}{2}$$

$$R_1 : (-\infty, -2] \cap \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) = \emptyset$$

б)  $x \in (-2, 1]$

$$x+2+x-1 < x-\frac{3}{2}$$

$$x < -\frac{5}{2}$$

$$R_2 : (-2, 1] \cap \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) = \emptyset$$

в)  $x \in (1, +\infty)$

$$x+2-x+1 < x-\frac{3}{2}$$

$$x > \frac{9}{2}$$

$$R_3 : (1, +\infty) \cap \left(\frac{9}{2}, +\infty\right) = \left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$$

Рјешење је  $x \in (9/2, +\infty)$ .

## 21. Ријешити неједначину

$$\left| \frac{x+4}{3x+2} \right| > \frac{1}{x}$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $3x+2 \neq 0 \wedge x \neq 0$ , тј.  $x \in (-\infty, -2/3) \cup (-2/3, 0) \cup (0, +\infty)$ .

		-4	-2/3	
$x+4$	-	+	+	
$3x+2$	-	-	+	
	+	-	+	

а)  $x \in (-\infty, -4]$

$$\frac{x+4}{3x+2} > \frac{1}{x}$$

$$\frac{x+4}{3x+2} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x^2+x-2}{x(3x+2)} > 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x(3x+2)} > 0$$

Види табелу 1.

б)  $x \in \left(-4, -\frac{2}{3}\right)$

$$-\frac{x+4}{3x+2} > \frac{1}{x}$$

$$-\frac{x+4}{3x+2} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x^2-7x+2}{x(3x+2)} < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-7 + \sqrt{41}}{2}, x_2 = \frac{-7 - \sqrt{41}}{2}$$

Види табелу 2.

**Табела 1**

		-2	-2/3	0	1
$x+2$	-	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	+
$x$	-	-	-	+	+
$3x+2$	-	-	+	+	+
$k$	+	-	+	-	+

$$S: x \in (-\infty, -2] \cup (-2/3, 0) \cup [1, +\infty)$$

$$R_1 : (-\infty, -4] \cap S = (-\infty, -4]$$



Табела 2

	$x_2$	$-2/3$	$x_1$	$0$	
$x$	-	-	-	-	+
$3x+2$	-	-	+	+	+
$x-x_1$	-	-	-	+	+
$x-x_2$	-	+	+	+	+
$k$	+	-	+	-	+

$$A: x \in \left( \frac{-7-\sqrt{41}}{2}, -\frac{2}{3} \right) \cup \left( \frac{-7+\sqrt{41}}{2}, 0 \right)$$

$$R_2: \left( -4, -\frac{2}{3} \right) \cap A = \left( -4, -\frac{2}{3} \right)$$

$$в) x \in \left( -\frac{2}{3}, +\infty \right)$$

$$\frac{x+4}{3x+2} > \frac{1}{x}$$

$$B: x \in (-\infty, -2] \cup \left( -\frac{2}{3}, 0 \right) \cup [1, +\infty)$$

$$R_3: x \in \left( -\frac{2}{3}, +\infty \right) \cap B = \left( -\frac{2}{3}, 0 \right) \cup (1, +\infty)$$

Укупно рјешење је:  $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = (-\infty, -2/3) \cup (-2/3, 0) \cup (1, +\infty)$ .

Рјешење је  $x \in (-\infty, 2)$ .

## 22. Ријешити неједначину

$$|x-1|+|x+3|\leq 4.$$

**Рјешење:**

	$-3$	$1$	
$x-1$	-	-	+
$x+3$	-	+	+

$$а) x \in (-\infty, -3]$$

$$-x+1-x-3 \leq 4$$

$$x \geq -3$$

$$R_1: x = -3$$

$$б) x \in (-3, 1)$$

$$-x+1+x+3 \leq 4$$

$$4 \leq 4$$

$$R_2: x \in (-3, 1)$$

$$в) x \in [1, +\infty)$$

$$x-1+x+3 \leq 4$$

$$x \leq 1$$

$$R_3: x = 1$$

Коначно рјешење је  $x \in [-3, 1]$ .

23. За које  $x \in \mathbf{R}$  важи следећа неједнакост

$$|x^2 - 1| < 3 ?$$

**Рјешење:**

$$-3 < x^2 - 1 < 3$$

а)  $x^2 - 1 > -3$

$$x^2 + 2 > 0$$

$$R_1 : \forall x \in \mathbf{R}$$

б)  $x^2 - 1 < 3$

$$(x-2)(x+2) < 0$$

$$R_2 : x \in (-2, 2)$$

Коначно рјешење је  $R = R_1 \cap R_2 \Rightarrow x \in (-2, 2)$ .

24. Ријешити систем једначина

$$\sqrt{x + 3y + 1} = 2$$

$$\sqrt{2x - y + 2} = 7y - 6 .$$

**Рјешење:**

$$x + 3y + 1 = 4$$

$$2x - y + 2 = (7y - 6)^2 \wedge 7y - 6 > 0 \Rightarrow y > \frac{6}{7}$$

$$x + 3y = 3$$

$$2x - y + 2 = 49y^2 - 84y + 36$$

$$x = 3 - 3y$$

$$2(3 - 3y) - y + 2 = 49y^2 - 84y + 36$$

$$49y^2 - 77y + 28 = 0$$

$$7y^2 - 11y + 4 = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = \frac{4}{7} \text{ (Како је } \frac{4}{7} < \frac{6}{7} \Rightarrow y_2 \text{ није рјешење.)}$$

$$x_1 = 0$$

$$R : (0, 1)$$

**25. Ријешити систем једначина**

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2x - 9 &= 0 \\x - 3y + 1 &= 0.\end{aligned}$$

**Рјешење:**

$$\begin{aligned}x &= 3y - 1 \\(3y - 1)^2 + y^2 + 2(3y - 1) - 9 &= 0 \\10y^2 - 10 &= 0 \\y^2 &= 1 \\y_1 = 1 \wedge y_2 = -1 \\x_1 = 2 \wedge x_2 = -4\end{aligned}$$

Рјешења су: (2,1) и (-4,-1).

**26. Наћи све вриједности  $b \in \mathbf{R}$  за које реални бројеви  $x$  и  $y$  задовољавају систем једначина**

$$\begin{aligned}3x + y &= b \\x + 2y &= 2b + 1\end{aligned}$$

при чему је  $x > 3y$ .

**Рјешење:**

$$\begin{aligned}\left. \begin{aligned}-6x - 2y &= -2b \\x + 2y &= 2b + 1\end{aligned} \right\} + \\x &= -\frac{1}{5} \\y &= b - 3x \\y &= b + \frac{3}{5}\end{aligned} \quad \begin{aligned}x > 3y &\Rightarrow -\frac{1}{5} > 3\left(b + \frac{3}{5}\right) \\-1 &> 15b + 9 \\b &< -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

**27. Ријешити систем једначина**

$$\begin{aligned}|x - y| &= 4 \\|x| + |y| &= 4 \quad (x, y \in \mathbf{R}).\end{aligned}$$

**Рјешење:**

а)  $x - y \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$

$$\left. \begin{aligned}x - y &= 4 \\x + y &= 4\end{aligned} \right\} + \Rightarrow x = 4, y = 0$$

$R_1 : (4, 0)$

б)  $x - y \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y < 0$

$$\left. \begin{aligned}x - y &= 4 \\x - y &= 4\end{aligned} \right\}$$

$R_2 : \forall x, y \in D_1$

$D_1$  је област четвртог квадранта координатног система.

в)  $x - y \geq 0 \wedge x < 0 \wedge y \geq 0$

$R_3 : \emptyset$

г)  $x - y \geq 0 \wedge x < 0 \wedge y < 0$

$$\left. \begin{aligned}x - y &= 4 \\-x - y &= 4\end{aligned} \right\} + \Rightarrow x = 0, y = -4$$

$R_4 : (0, -4)$

$$\begin{aligned} \text{д) } & x - y < 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ & \left. \begin{array}{l} -x + y = 4 \\ x + y = 4 \end{array} \right\} + \Rightarrow x = 0, y = 4 \\ & R_5 : (0, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ђ) } & x - y < 0 \wedge x \geq 0 \wedge y < 0 \\ & R_6 : \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{е) } & x - y < 0 \wedge x < 0 \wedge y \geq 0 \\ & \left. \begin{array}{l} -x + y = 4 \\ -x + y = 4 \end{array} \right\} \\ & R_7 : \forall x, y \in D_2 \\ & D_2 \text{ је област другог квадранта} \\ & \text{координатног система.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ж) } & x - y < 0 \wedge x < 0 \wedge y < 0 \\ & \left. \begin{array}{l} -x + y = 4 \\ -x - y = 4 \end{array} \right\} + \Rightarrow x = -4, y = 0 \\ & R_8 : (-4, 0) \end{aligned}$$

Укупно рјешење је:  $(4, 0), (0, -4), (0, 4), (-4, 0), \forall x, y \in D_1, \forall x, y \in D_2$ .

## 28. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned} & y + x - 1 = 0 \\ & |y| - x - 1 = 0. \end{aligned}$$

**Рјешење:**

$$\begin{array}{ll} \text{а) } & y \geq 0 \\ & \left. \begin{array}{l} y + x = 1 \\ y - x = 1 \end{array} \right\} + \\ & 2y = 2 \\ & y = 1 \\ & x = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{б) } & y < 0 \\ & \left. \begin{array}{l} y + x = 1 \\ -y - x = 1 \end{array} \right\} + \\ & 0 = 2 \text{ - немогуће} \end{array}$$

Рјешење је:  $x=0, y=1$ .

## 29. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned} & y - 2x + 1 = 0 \\ & |y| - x - 1 = 0. \end{aligned}$$

**Рјешење:**

$$\begin{array}{ll} \text{а) } & y \geq 0 \\ & y - 2x = -1 \\ & y - x = 1 \Rightarrow y = x + 1 \\ & x + 1 - 2x = -1 \\ & x = 2 \\ & y = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{б) } & y < 0 \\ & y - 2x = -1 \\ & -y - x = 1 \\ & -3x = 0 \\ & x = 0 \\ & y = -1 \end{array}$$

### 30. Ријешити систем једначина

$$\begin{cases} |2-x| + y = 4 \\ |x+3| + 2y = 1 \end{cases}$$

**Рјешење:**

		-3	2	
2-x	+	+	-	
x+3	-	+	+	

а)  $x \in (-\infty, -3]$

$$\begin{cases} 2-x+y=4 \\ -x-3+2y=1 \end{cases} \Rightarrow y=2, x=0$$

Нема рјешења јер  $x \notin (-\infty, -3]$

б)  $x \in (-3, 2]$

$$\begin{cases} 2-x+y=4 \\ x+3+2y=1 \end{cases} \Rightarrow y=0, x=-2$$

в)  $x \in (2, +\infty)$

$$\begin{cases} -2+x+y=4 \\ x+3+2y=1 \end{cases} \Rightarrow y=-8, x=14$$

Рјешења су:  $(-2, 0)$  и  $(14, -8)$ .

### 31. Ријешити систем једначина

$$\begin{cases} |3-x| + 2y = 6 \\ |x+1| + y = 2 \end{cases}$$

**Рјешење:**

		-1	3	
3-x	+	+	-	
x+1	-	+	+	

а)  $x \in (-\infty, -1]$

$$\begin{cases} 3-x+2y=6 \\ -x-1+y=2 \end{cases} \Rightarrow y=0, x=-3$$

б)  $x \in (-1, 3]$

$$\begin{cases} 3-x+2y=6 \\ x+1+y=2 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{4}{3}, x=-\frac{1}{3}$$

в)  $x \in (3, +\infty)$

$$\begin{cases} -3-x+2y=6 \\ x+1+y=2 \end{cases} \Rightarrow y=8, x=-7$$

Рјешења су:  $(-3, 0)$  и  $(-1/3, 4/3)$ .

### 32. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned}3x + |2y + 2| &= 2 \\ -x - |y - 1| &= 0.\end{aligned}$$

**Рјешење:**

	$-\infty$	$-1$	$1$
$2y+2$	-	+	+
$y-1$	-	-	+

а)

$$\begin{aligned}y &\in (-\infty, -1) \\ \left. \begin{aligned}3x - (2y + 2) &= 2 \\ -x + y - 1 &= 0\end{aligned} \right\} &\Rightarrow x = 6, y = 7 - \text{није рјешење}\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}y &\in (-1, 1) \\ \left. \begin{aligned}3x + (2y + 2) &= 2 \\ -x + y - 1 &= 0\end{aligned} \right\} &\Rightarrow x = -\frac{2}{5}, y = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned}y &\in (1, +\infty) \\ \left. \begin{aligned}3x + (2y + 2) &= 2 \\ -x - (y - 1) &= 0\end{aligned} \right\} &\Rightarrow x = -2, y = 3\end{aligned}$$

### 33. Наћи рјешења система неједначина

$$\begin{aligned}3x^2 - 2x - 1 &> 0 \quad (1) \\ x^2 + x - 6 &< 0 \quad (2).\end{aligned}$$

**Рјешење:**

Из (1) слиједи  $(x-1)(x+1/3) > 0$ , па је рјешење (1)  $x \in (-\infty, -1/3) \cup (1, +\infty)$ .

Из (2) слиједи  $(x-2)(x+3) < 0$ , па је рјешење (2)  $x \in (-3, 2)$ .

Рјешење система неједначина добијамо из  $[(-\infty, -1/3) \cup (1, +\infty)] \cap (-3, 2) = (-3, -1/3) \cup (1, 2)$ .

### 3. ТРИГОНОМЕТРИЈА

#### 1. Доказати

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{2 \cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

*Рјешење:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{2 \cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta - \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) - \sin^2 \beta (1 - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \end{aligned}$$

#### 2. Израчунати $\sin^2 2\alpha$ ако је

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7.$$

*Рјешење:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7 \\ & \frac{\cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 7 \\ & 1 + \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ & 9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 2 \\ & \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{2}{9} \\ & 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \\ & \sin^2 2\alpha = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

### 3. Доказати идентитет

$$\frac{1 + \cos(2x + 630^\circ) + \sin(2x + 810^\circ)}{1 - \cos(2x - 630^\circ) + \sin(2x + 630^\circ)} = \operatorname{ctg} x .$$

*Рјешење:*

$$630^\circ = 720^\circ - 90^\circ, \quad \cos 630^\circ = 0, \quad \sin 630^\circ = -1$$

$$810^\circ = 720^\circ + 90^\circ, \quad \cos 810^\circ = 0, \quad \sin 810^\circ = 1$$

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \cos 2x \cos 630^\circ - \sin 2x \sin 630^\circ + \sin 2x \cos 810^\circ + \cos 2x \sin 810^\circ}{1 - \cos 2x \cos 630^\circ - \sin 2x \sin 630^\circ + \sin 2x \cos 630^\circ + \cos 2x \sin 630^\circ} = \\ & \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x} = \\ & \frac{2 \cos x (\cos x + \sin x)}{2 \sin x (\cos x + \sin x)} = \operatorname{ctg} x \end{aligned}$$

### 4. Доказати да вриједи $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1$ ако је $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$ .

*Рјешење:*

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta), \quad \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \operatorname{ctg} x \\ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] + \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] \operatorname{tg} \alpha &= \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} (\alpha + \beta) + \operatorname{ctg} (\alpha + \beta) \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} + \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = 1 \end{aligned}$$

### 5. Доказати

$$\sin^2 \left( \frac{\pi}{8} + \alpha \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{8} - \alpha \right) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

*Рјешење:*

$$\begin{aligned} & \left[ \sin \left( \frac{\pi}{8} + \alpha \right) - \sin \left( \frac{\pi}{8} - \alpha \right) \right] \left[ \sin \left( \frac{\pi}{8} + \alpha \right) + \sin \left( \frac{\pi}{8} - \alpha \right) \right] = \\ &= 2 \cos \frac{\frac{\pi}{8} + \alpha + \frac{\pi}{8} - \alpha}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{8} + \alpha - \frac{\pi}{8} + \alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\frac{\pi}{8} + \alpha + \frac{\pi}{8} - \alpha}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{8} + \alpha - \frac{\pi}{8} + \alpha}{2} = \\ &= 4 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \right) - \sin \left( \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right) \right] \sin 2\alpha = \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



## 6. Доказати идентитет

$$\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4 \alpha.$$

*Рјешење:*

$$\begin{aligned}\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 &= 8\cos^4 \alpha \\ (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 3 &= 8\cos^4 \alpha \\ \cos^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 3 &= 8\cos^4 \alpha \\ \cos^4 \alpha - 6(1 - \cos^2 \alpha)\cos^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)^2 - 4(1 - \cos^2 \alpha) + 3 &= 8\cos^4 \alpha \\ \cos^4 \alpha - 6\cos^2 \alpha + 6\cos^4 \alpha + 4\cos^2 \alpha + 1 - 2\cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha - 4 + 4\cos^2 \alpha + 3 &= 8\cos^4 \alpha \\ 8\cos^4 \alpha &= 8\cos^4 \alpha\end{aligned}$$

## 7. Доказати једнакост

$$\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ} = 1.$$

*Рјешење:*

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}[\sin 30^\circ + \sin 10^\circ] + \frac{1}{2}[\cos 60^\circ + \cos 260^\circ]}{\frac{1}{2}[\sin 30^\circ + \sin 12^\circ] + \frac{1}{2}[\cos 60^\circ + \cos 258^\circ]} &= \frac{\frac{1}{2} + \sin 10^\circ + \frac{1}{2}\cos 260^\circ}{\frac{1}{2} + \sin 12^\circ + \frac{1}{2}\cos 258^\circ} = \frac{1 + \sin 10^\circ + \cos 260^\circ}{1 + \sin 12^\circ + \cos 258^\circ} = 1 \\ \cos 260^\circ &= \cos(270^\circ - 10^\circ) = -\sin 10^\circ \\ \cos 258^\circ &= \cos(270^\circ - 12^\circ) = -\sin 12^\circ\end{aligned}$$

## 8. Доказати идентитет

$$\frac{\cos^2 \alpha + 2\sin^2(\alpha - \pi)}{\cos^3(\alpha - 4\pi)} + \frac{\cos^2 \alpha + 4\sin \alpha + \sin^2(\alpha + \pi)}{\cos \alpha(4\sin \alpha + 1)} = \frac{2}{\cos^3 \alpha}.$$

*Рјешење:*

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \pi) &= -\sin \alpha \\ \sin(\alpha - \pi) &= -\sin \alpha \\ \cos(\alpha - 4\pi) &= \cos \alpha \\ \frac{\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha + 4\sin \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha(4\sin \alpha + 1)} &= \frac{2}{\cos^3 \alpha} \\ \frac{\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} &= \frac{2}{\cos^3 \alpha} \\ \frac{2}{\cos^3 \alpha} &= \frac{2}{\cos^3 \alpha}\end{aligned}$$

### 9. Доказати идентитет

$$\frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)} - \frac{1 + 2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}.$$

*Рјешење:*

$$\begin{aligned} & \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)} - \frac{1 + 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + 1} \\ & \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + 1} \\ & \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + 1} \\ & \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + 1} \\ & \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + 1} \\ & \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + 1} \end{aligned}$$

### 10. Одредити $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ ако је $3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha = 5$ .

*Рјешење:*

$$\begin{aligned} 3 \sin \alpha = 5 - 4 \cos \alpha & \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5 - 4 \cos \alpha}{3} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 & \Rightarrow \left( \frac{5 - 4 \cos \alpha}{3} \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \\ 25 \cos^2 \alpha - 40 \cos \alpha + 16 = 0 \\ (\cos \alpha)_{1,2} = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

### 11. Ријешити једначину $\cos^2 2x + \sin^4 x = 2$ .

*Рјешење:*

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) & 5m^2 - 2m - 7 &= 0 \\ \cos^2 2x + \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 &= 2 & m_1 &= \frac{7}{5}, \quad m_2 = -1 \\ 5 \cos^2 2x - 2 \cos 2x - 7 &= 0 & \cos 2x &= \frac{7}{5} - \text{немогуће} \\ \text{Смјена: } \cos 2x &= m. & \cos 2x = -1 &\Rightarrow 2x = (2k + 1)\pi \Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

## 12. Ријешити једначину $\sin 4x + \sin x = \sin 3x + \sin 2x$ .

**Рјешење:**

$$2 \sin \frac{4x+x}{2} \cos \frac{4x-x}{2} = 2 \sin \frac{3x+2x}{2} \cos \frac{3x-2x}{2}$$

$$\sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} = \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\sin \frac{5x}{2} (\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2}) = 0$$

$$\sin \frac{5x}{2} (-2 \sin \frac{\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}}{2} \sin \frac{\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}}{2}) = 0$$

$$\sin \frac{5x}{2} \sin x \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\text{a) } \sin \frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} = k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{2k\pi}{5}$$

$$\text{б) } \sin x = 0 \Rightarrow x_2 = k\pi$$

$$\text{в) } \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x_3 = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Рјешења су: } x_1 = \frac{2k\pi}{5}, \quad x_2 = k\pi.$$

## 13. Ријешити једначину

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{x^2 + x + 1} = -\sqrt{3}.$$

**Рјешење:**

$$\frac{2\pi x}{x^2 + x + 1} = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$6\pi x = (-\pi + 3k\pi)(x^2 + x + 1)$$

$$(3k-1)x^2 + (3k-7)x + 3k-1 = 0$$

$$D = (3k-7)^2 - 4(3k-1)^2 \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3k^2 + 2k - 5 = 0 \Rightarrow (k + \frac{5}{3})(k-1) \leq 0 \quad (\text{да би имала реална рјешења})$$

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 1$$

$$\text{За } k_1 = -1 \Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = -2$$

$$\text{За } k_2 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x + 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{За } k_3 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{5,6} = 1$$

#### 14. Наћи сва рјешења једначине

$$\frac{2}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = 5 \sin x - 2.$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $1 + \operatorname{ctg}^2 x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{2}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = 5 \sin x - 2$$

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

$$\text{Смјена: } \sin x = t$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$\sin x = 2$  – немогуће

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

#### 15. а) Ријешити једначину

$$\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1.$$

б) Колико има рјешења у сегменту  $[5\pi, 7\pi]$ ?

**Рјешење:**

$$\text{а) } \sin \frac{x}{2} + \cos x = 1 \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\sin \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} \left( 1 - 2 \sin \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$1^\circ \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x_k = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2^\circ 1 - 2 \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x_n = \frac{\pi}{3} + 4n\pi,$$

$$3^\circ \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$x_m = \frac{5\pi}{3} + 4m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

б) У сегменту  $[5\pi, 7\pi]$  налазе се два рјешења и то су:  $x = 6\pi$  и  $x = 5\pi/3 + 4\pi = 2\pi/3 + 5\pi$ .

### 16. Наћи нуле функције

$$f(x) = \cos^2 2x + \sin^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2.$$

**Рјешење:**

$$\cos^2 2x + \sin^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2 = 0$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + \sin^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2 = 0$$

$$(1 - 2\sin^2 x)^2 + \sin^2 x - \sin^2 x(1 - \sin^2 x) - 2 = 0$$

$$5\sin^4 x - 4\sin^2 x - 1 = 0$$

$$\text{Смјена: } x = \sin^2 x \Rightarrow 5t^2 - 4t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{5}$$

### 17. а) Ријешити једначину

$$\sin 4x - \sin 3x = \sin 2x - \sin x.$$

**б) Колико има рјешења у сегменту  $[\pi, 3\pi]$ ?**

**Рјешење:**

$$\text{а) } 2\cos \frac{7x}{2} \sin \frac{x}{2} = 2\cos \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}$$

$$2\sin \frac{x}{2} \left( \cos \frac{7x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) = 0; 2$$

$$\sin \frac{x}{2} \left( -2\sin \frac{\frac{7x}{2} + \frac{3x}{2}}{2} \sin \frac{\frac{7x}{2} - \frac{3x}{2}}{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} \sin \frac{5x}{2} \sin x = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \vee \sin \frac{5x}{2} = 0 \vee \sin x = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x_k = 2k\pi, \sin \frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow x_m = \frac{2}{5}m\pi$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x_s = s\pi, \quad k, m, s \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$\text{б) } x_1 = \pi, \quad x_2 = 2\pi, \quad x_3 = 3\pi, \quad x_4 = \frac{6\pi}{5}, \quad x_5 = \frac{8\pi}{5}, \quad x_6 = \frac{12\pi}{5}, \quad x_7 = \frac{14\pi}{5}.$$

18. а) Ријешити једначину

$$\cos \frac{x}{2} - \cos x = 1.$$

б) Колико има рјешења у сегменту  $[2\pi, 4\pi]$ ?

*Рјешење:*

а)

$$\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \left( -\frac{x}{2} \right)$$
$$\cos \frac{x}{2} \left( 1 - 2 \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \vee 1 - 2 \cos \frac{x}{2} = 0$$
$$\cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x_k = \pi + 2k\pi$$
$$1 - 2 \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \Rightarrow x_n = \frac{2\pi}{3} + 4n\pi$$
$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2s\pi \Rightarrow x_s = -\frac{2\pi}{3} + 4s\pi$$
$$k, n, s \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

б)  $x_1 = 3\pi, x_2 = \frac{10\pi}{3}.$

19. Ријешити једначину

$$\sin x + \sin 3x + \sin 2x = 1 + \cos 2x + \cos x.$$

*Рјешење:*

$$2 \sin \frac{4x}{2} \cos \left( -\frac{2x}{2} \right) + \sin 2x = 2 \cos^2 x + \cos x$$
$$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 2 \cos^2 x + \cos x$$
$$\sin 2x(2 \cos x + 1) = \cos x(2 \cos x + 1)$$
$$(2 \cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0$$
$$(2 \cos x + 1) \cos x(2 \sin x - 1) = 0$$
$$2 \cos x + 1 = 0 \vee \cos x = 0 \vee 2 \sin x - 1 = 0$$
$$\cos x = 0 \Rightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$
$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_m = \frac{2\pi}{3} + 2m\pi$$
$$x_n = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \quad m, n \in Z$$
$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_s = \frac{\pi}{6} + 2s\pi, s \in Z$$

## 20. Ријешити једначину

$$\operatorname{ctgx} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 .$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје :  $\sin x \neq 0 \wedge \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq k\pi, x \neq \pi + 2s\pi, k, s \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} &= 2 \quad | \cdot \sin x(1 + \cos x) \\ \cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x &= 2 \sin x(1 + \cos x) \\ \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x &= 2 \sin x + 2 \sin x \cos x \\ \cos x + 1 &= 2 \sin x(1 + \cos x) \\ (\cos x + 1)(1 - 2 \sin x) &= 0 \Rightarrow 1 - 2 \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} &\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}$$

## 21. Ријешити тригонометријску једначину

$$1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

**Рјешење:**

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\ 1 - \cos^2 2x &= \sin 3x + \sin x \\ \sin^2 2x &= 2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} \\ \sin^2 2x &= 2 \sin 2x \cos x \\ \sin 2x(\sin 2x - 2 \cos x) &= 0 \\ \sin 2x(2 \sin x \cos x - 2 \cos x) &= 0 \\ \sin 2x \cos x(\sin x - 1) &= 0 \\ \sin 2x = 0 \vee \cos x = 0 \vee \sin x - 1 &= 0 \\ \sin 2x = 0 &\Rightarrow x_k = \frac{k\pi}{2} \\ \cos x = 0 &\Rightarrow x_k = \frac{k\pi}{2} \\ \sin x = 1 &\Rightarrow x_m = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, m, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

## 22. Наћи оно рјешење неједначине

$$\frac{1 - \cos x}{1 - 2 \cos x} < \frac{1 + \cos x}{1 - 4 \cos^2 x}$$

за које је  $x \in (0, 2\pi)$ .

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $1 - 2 \cos x \neq 0 \wedge 1 + 2 \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$$\frac{1 - \cos x}{1 - 2 \cos x} - \frac{1 + \cos x}{1 - 4 \cos^2 x} < 0$$
$$\frac{(1 - \cos x)(1 + 2 \cos x) - 1 - \cos x}{1 - 4 \cos^2 x} < 0$$

$$\frac{-2 \cos^2 x}{1 - 4 \cos^2 x} < 0 \Rightarrow 1 - 4 \cos^2 x > 0$$

$$(1 - 2 \cos x)(1 + 2 \cos x) > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (1 - 2 \cos x) > 0 \\ (1 + 2 \cos x) > 0 \end{array} \right\} \text{ или } \left. \begin{array}{l} (1 - 2 \cos x) < 0 \\ (1 + 2 \cos x) < 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Рјешење: } x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{3}\right\}$$

## 23. Ријешити неједначину

$$\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$$

**Рјешење:**

$$\cos^2 x \cos x \cos 3x - \sin^2 x \sin x \sin 3x > \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} \cos^2 x (\cos 4x + \cos 2x) - \frac{1}{2} \sin^2 x (\cos 2x - \cos 4x) > \frac{5}{8}$$

$$\cos 4x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \cos 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) > \frac{5}{4}$$

$$\cos 4x + \cos 2x \cos 2x > \frac{5}{4}$$

$$\cos 4x + \frac{1 + \cos 4x}{2} > \frac{5}{4}$$

$$\cos 4x > \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 4x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$



## 24. Ријешити неједначину

$$\cos^2 x - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cos x < \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**Рјешење:**

Смјена :  $\cos x = t$

$$t^2 - \frac{1-\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{4} < 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0 \Rightarrow t \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

## 25. Ријешити систем једначина

$$(1) \quad \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(2) \quad \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**Рјешење:**

$$(1) + (2) \Rightarrow \sin x \sin y + \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \cos x \cos y - \sin x \sin y = 0$$

$$\cos(x + y) = 0$$

$$\cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x - y = \pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\cos(x + y) = 0 \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \\ x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + \pi(2n + k)$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(2n + k)$$

$$y_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(k - 2n)$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi \\ x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \pi(2n + k)$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(2n + k)$$

$$y_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(k - 2n)$$

#### 4. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ И ЛОГАРИТАМСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ, НЕЈЕДНАЧИНЕ И СИСТЕМИ

1. Ријешити једначину  $5 \cdot 3^{2x-1} \cdot 9^{x-0.5} = 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}$ .

*Рјешење:*

$$\begin{aligned}5 \cdot 3^{2x-1} - 3^{2(x-0.5)} &= 3^{2x} + 4 \cdot 3^{2x-2} \\5 \cdot 3^{2x-1} - 3^{2x-1} - 3^{2x} - 4 \cdot 3^{2x-2} &= 0 \\4 \cdot 3^{2x-1} - 3^{2x} - 4 \cdot 3^{2x-2} &= 0 \\3^{2x} \left( \frac{4}{3} - 1 - \frac{4}{9} \right) &= 0 \Rightarrow 3^{2x} = 0\end{aligned}$$

Једначина нема рјешење.

2. Ријешити једначину

$$3\sqrt[3]{81} - 10\sqrt[3]{9} + 3 = 0 \quad (x \neq 0).$$

*Рјешење:*

$$\begin{aligned}3\sqrt[3]{9^2} - 10\sqrt[3]{9} + 3 &= 0 \\ \text{Смјена: } \sqrt[3]{9} &= t. \\ 3t^2 - 10t + 3 &= 0 \\ t_1 = 3, t_2 = \frac{1}{3} \\ \sqrt[3]{9} = 3 &\Rightarrow 3^{\frac{2}{x}} = 3 \Rightarrow x = 2 \\ \sqrt[3]{9} = \frac{1}{3} &\Rightarrow 3^{\frac{2}{x}} = 3^{-1} \Rightarrow x = -2\end{aligned}$$

3. Ријешити једначину

$$3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2} = 202.5 \cdot 2^x.$$

*Рјешење:*

$$\begin{aligned}3^x (3 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2) &= \frac{405}{2} \cdot 2^x \\ 3^x \cdot 60 &= \frac{405}{2} \cdot 2^x \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} = \frac{27}{8} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow x = 3\end{aligned}$$

#### 4. Ријешити једначину

$$0.4^{\log^2 x + 1} - 6.25^{2 - \log x^3} = 0.$$

*Рјешење:*

Област дефинисаности:  $x > 0$ .

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x + 1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2(2 - 3 \log x)}$$

$$\log^2 x + 1 = -4 + 6 \log x$$

$$\log^2 x - 6 \log x + 5 = 0$$

Уведимо смјену:  $\log x = t$ .

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$t_1 = 5, \quad t_2 = 1$$

$$\log x = 5 \Rightarrow x = 10^5$$

$$\log x = 1 \Rightarrow x = 10$$

#### 5. Ријешити једначину $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 10) = 2$ .

*Рјешење:*

Дефиниционо подручје:  $x^2 - 5x + 10 > 0$  за  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x - 1 > 0 \wedge x - 1 \neq 1$ , тј.  $x > 1$  и  $x \neq 2$ .

$$x^2 - 5x + 10 = (x - 1)^2$$

$$x^2 - 5x + 10 - x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow -3x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$$

#### 6. Ријешити једначину

$$\frac{\log x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \log 5 - 1}{\frac{1}{4} \log(x - 1)} = \log 0,01.$$

*Рјешење:*

Дефиниционо подручје:  $x - 1 > 0 \wedge x > 0$  тј.  $x > 1$ .

$$\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log 5 - 1 = -2 \frac{1}{4} \log(x - 1)$$

$$\log x + \log 5 - 2 = -\log(x - 1)$$

$$\log \frac{5x}{100} = \log(x - 1)^{-1}$$

$$\frac{x}{20} = \frac{1}{x - 1}$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -4$$

Рјешење је  $x = 5$ , јер  $x = -4$  не припада дефиниционом подручју.

## 7. Ријешити једначину $0,1x^{\log x - 2} = 100$ .

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $x > 0$ .

$$x^{\log x - 2} = 10^3$$

$$\log x^{\log x - 2} = \log 10^3$$

$$(\log x - 2)\log x = 3$$

$$\log^2 x - 2\log x - 3 = 0$$

$$\text{Смјена : } \log x = t$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t_1 = 3, t_2 = -1$$

$$\log x = 3 \Rightarrow x = 10^3$$

$$\log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1}$$

## 8. Наћи сва рјешења једначине

$$4^{\frac{\log_1(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 5)}{2}} = \frac{1}{9}.$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} a = \frac{\log_4 a}{\log_4 \frac{1}{2}} = -2 \log_4 a = \log_4 \frac{1}{a^2}$$

$$4^{\log_4 (\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 5)^{-2}} = \frac{1}{9}$$

$$(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 5)^2 = 9$$

$$(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 8)(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2) = 0$$

$$\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 8 = 0 / : \cos^2 x \neq 0 \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\text{tg}^2 x + 5 \text{tg} x + \frac{8}{\cos^2 x} = 0, \quad (\cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x})$$

$$9 \text{tg}^2 x + 5 \text{tg} x + 8 = 0$$

$$\text{Смјена : } \text{tg} x = t.$$

$$9t^2 + 5t + 8 = 0$$

$$D < 0 \Rightarrow \text{нема реална рјешења}$$

$$\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 = 0$$

$$3 \text{tg}^2 x + 5 \text{tg} x + 2 = 0$$

$$3t^2 + 5t + 2 = 0$$

$$t_1 = -\frac{2}{3}, \quad t_2 = -1$$

$$\text{Рјешење је: } \text{tg} x = -1 \wedge \text{tg} x = -2/3.$$

## 9. Ријешити једначину

$$\left( \frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \right) \cdot x^{0.5(\log_2 x^2)^2 - 7} = \frac{x^6}{2^{11}}.$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје :

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x+1}-1 \neq 0 \\ \sqrt{x+1}+1 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \neq 0 \wedge \left. \begin{array}{l} x \geq -1 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0, +\infty)$$

$$\frac{\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1}{x+1-1} \cdot x^{\frac{1}{2}(2\log_2 x)^2 - 7} = \frac{x^6}{2^{11}}$$

$$\frac{2}{x} \cdot x^{\frac{1}{2} \cdot 4\log_2^2 x - 7} = \frac{x^6}{2^{11}} \Rightarrow \frac{x^{2\log_2^2 x}}{x^7} = \frac{x^7}{2^{12}}$$

$$2^{12} \cdot x^{2\log_2^2 x} = x^{14}$$

$$\log_2 2^{12} + \log_2 x^{2\log_2^2 x} = \log_2 x^{14}$$

$$2\log_2^3 x - 14\log_2 x + 12 = 0$$

$$\log_2^3 x - 7\log_2 x + 6 = 0$$

$$\text{Смјена : } t = \log_2 x$$

$$t^3 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = -3$$

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x_1 = 2, \log_2 x = 2 \Rightarrow x_2 = 4, \log_2 x = -3 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{8}$$

## 10. Ријешити једначину

$$\log_2 \sqrt[3]{6\sqrt{2x+1} + 28} = 2.$$

**Рјешење:**

$$\text{Дефиниционо подручје: } 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[ -\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

$$\sqrt[3]{6\sqrt{2x+1} + 28} = 4$$

$$6\sqrt{2x+1} + 28 = 64$$

$$6\sqrt{2x+1} = 36$$

$$\sqrt{2x+1} = 2$$

$$2x+1 = 4$$

$$x = \frac{3}{2}$$

### 11. Ријешити једначину

$$\log \sqrt{75 + 5^{\sqrt[3]{x-1}}} = 1.$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{75 + 5^{\sqrt[3]{x-1}}} = 10 \Big| ^2 \Rightarrow 75 + 5^{\sqrt[3]{x-1}} = 100$$

$$5^{\sqrt[3]{x-1}} = 25 \Rightarrow 5^{\sqrt[3]{x-1}} = 5^2$$

$$\sqrt[3]{x-1} = 2 \Big| ^3 \Rightarrow x = 9$$

### 12. Ријешити једначину

$$\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10.$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $x > 0, x \neq 1$ .

$$x^{\log \sqrt{x}} = 100 \Big| \log$$

$$\log x^{\log \sqrt{x}} = \log 10^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \log^2 x = 2$$

$$\log^2 x = 4 \Rightarrow \log x = 2 \wedge \log x = -2$$

$$x_1 = 100, x_2 = \frac{1}{100}$$

### 13. Ријешити једначину

$$\log_{\frac{1}{56}} (5^{x+1} - 25^x) = -2.$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $5^{x+1} - 25^x > 0 \Rightarrow 5^{x+1} > 5^{2x} \Rightarrow x+1 > 2x \Rightarrow x < 1$

$$5^{x+1} - 25^x = (56^{-1})^{-2}$$

$$5^{x+1} - 5^{2x} = 56^2$$

$$5 \cdot 5^x - 5^{2x} - 3136 = 0$$

$$\text{Смјена: } 5^x = t$$

$$t^2 - 5t + 3136 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 3136 = -12519$$

Како је  $D < 0$  то значи да немамо реална рјешења.

#### 14. Ријешити једначину

$$x^{2\log x - 5} = 0.01.$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $x > 0 \wedge x \neq 1$

$$x^{2\log x - 5} = 10^{-2} \quad | \log$$

$$(2\log x - 5)\log x = \log 10^{-2}$$

$$2\log^2 x - 5\log x + 2 = 0$$

$$\text{Смјена : } \log x = t$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

$$\log x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{10}$$

#### 15. Ријешити једначину

$$\log \sqrt[3]{10(x-1)^2} - \frac{2}{3}\log(3+x) = \frac{1}{3}.$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $3+x > 0 \Rightarrow x > -3$

$$\frac{1}{3}\log 10(x-1)^2 - \frac{2}{3}\log(3+x) = \frac{1}{3}$$

$$\log 10(x-1)^2 - \log(3+x)^2 = 1$$

$$\log \frac{10(x-1)^2}{(3+x)^2} = 1$$

$$\frac{10(x-1)^2}{(3+x)^2} = 10$$

$$(x-1)^2 = (3+x)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 9 + 6x + x^2$$

$$-8x = 8$$

$$x = -1$$

## 16. Ријешити једначину

$$x^{1+\log_2 x} = 4.$$

*Рјешење:*

Дефиниционо подручје:  $x > 0 \wedge x \neq 1$

$$\log_2 x^{1+\log_2 x} = \log_2 4$$

$$(1 + \log_2 x) \log_2 x = 2$$

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0$$

Смјена:  $\log_2 x = t$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -2$$

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\log_2 x = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}$$

## 17. Ријешити једначину

$$2(\log 2 - 1) + \log(5^{\sqrt{x}} + 1) = \log(5^{1-\sqrt{x}} + 5)$$

*Рјешење:*

Д.П.  $x \geq 0$ .

$$\log 2^2 - 2 + \log(5^{\sqrt{x}} + 1) - \log(5^{1-\sqrt{x}} + 5) = 0$$

$$\log \frac{4(5^{\sqrt{x}} + 1)}{5^{1-\sqrt{x}} + 5} = 2$$

$$\frac{4(5^{\sqrt{x}} + 1)}{5^{1-\sqrt{x}} + 5} = 100 \Rightarrow \frac{5^{\sqrt{x}} + 1}{5^{1-\sqrt{x}} + 5} = 25 \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$(5^{\sqrt{x}})^2 - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0$$

$$5^{\sqrt{x}} = t \Rightarrow t^2 - 124t - 125 = 0$$

$$t_1 = 125,$$

$$t_2 = -1 \text{ (није рјешење јер је } t > 0)$$

$$5^{\sqrt{x}} = 5^3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9.$$



## 18. Ријешити једначину

$$\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = \log \sqrt{100}.$$

**Рјешење:**

$$\text{Д.П. } x \geq 0 \wedge x \neq 1$$

$$\log_{3x} 3 - \log_{3x} x + \log_3^2 x = 1$$

$$\frac{1}{\log_3 3x} - \frac{\log_3 x}{\log_3 3x} + \log_3^2 x = 1$$

$$1 - \log_3 x + \log_3^2 x \cdot \log_3 3x = \log_3 3x$$

$$(1 + \log_3 x) \log_3^2 x - 2 \log_3 x = 0$$

$$(\log_3^2 x + \log_3 x - 2) \log_3 x = 0$$

$$\log_3 x = 0 \Rightarrow x = 1, \text{ није рјешење}$$

$$\log_3 x = t \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -2$$

$$\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$\log_3 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

Рјешења једначине су  $x = 3 \wedge x = \frac{1}{9}$ .

## 19. Ријешити једначину

$$\log \left( 3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}} \right) - 2 = \frac{1}{4} \log 16 - \sqrt{x+0,25} \cdot \log 4.$$

**Рјешење:**

$$\text{Дефиниционо подручје: } 4x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{4}$$

$$\log \left( 3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}} \right) - 2 = \frac{1}{4} \log 4^2 - \sqrt{x + \frac{1}{4}} \cdot \log 4$$

$$\log \left( 3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}} \right) - 2 = \frac{1}{2} \log 4 - \frac{\sqrt{4x+1}}{2} \cdot \log 4$$

$$\log \left( 3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}} \right) - 2 = \frac{1}{2} \log 2^2 \cdot (1 - \sqrt{4x+1})$$

$$\log \left( 3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}} \right) - 2 = (1 - \sqrt{4x+1}) \log 2$$

$$\log \left( 3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}} \right) - 2 = \log 2^{1-\sqrt{4x+1}}$$

$$\log \left( 3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}} \right) - \log 2^{1-\sqrt{4x+1}} = 2 \log 10$$

$$\log \frac{3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}}{2^{1-\sqrt{4x+1}}} = \log 10^2$$

$$\frac{3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}}{2^{1-\sqrt{4x+1}}} = 100$$

$$\frac{3^{\sqrt{4x+1}} - 2^4 \cdot 2^{-\sqrt{4x+1}}}{2^{-\sqrt{4x+1}}} = 200$$

$$\frac{3^{\sqrt{4x+1}}}{2^{-\sqrt{4x+1}}} - 2^4 = 200$$

$$3^{\sqrt{4x+1}} \cdot 2^{\sqrt{4x+1}} = 216$$

$$6^{\sqrt{4x+1}} = 6^3$$

$$\sqrt{4x+1} = 3 \Rightarrow x = 2$$

## 20. Ријешити неједначину

$$\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1 - \log x} > 1.$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $x > 0 \wedge \log x \neq 0 \wedge 1 - \log x \neq 0$ ; слиједи да је  $x \in (0, 1) \cup (1, 10) \cup (10, +\infty)$ .

$$\frac{1}{\log x(1 - \log x)} - 1 > 0$$

$$\frac{1 - \log x + \log^2 x}{\log x(1 - \log x)} > 0$$

Смјена:  $\log x = t$

$$\frac{1 - t + t^2}{t(1 - t)} > 0$$

Како је  $1 - t + t^2 > 0$  за  $\forall x \in \mathbb{R}$  слиједи  $t(1 - t) > 0 \Rightarrow t \in (0, 1)$ .

$$0 < \log x < 1 \Rightarrow 1 < x < 10$$

Рјешење је  $x \in (1, 10)$ .

## 21. Ријешити систем једначина

$$3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}$$

$$y - x = 2 \quad .$$

**Рјешење :**  $y = x + 2$

$$3^x \cdot 2^{x+2} = \frac{1}{9}$$

$$3^2 \cdot 3^x \cdot 2^{x+2} = 1$$

$$3^{x+2} \cdot 2^{x+2} = 1$$

$$6^{x+2} = 1$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

## 22. Ријешити систем једначина

$$y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}}$$
$$\log_4 y \cdot \log_y (3x - y) = 1.$$

**Рјешење:**

Дефиниционо подручје:  $y > 0 \wedge x > 0 \wedge 3x > y$ .

Логаритмујмо прву једначину (са основом  $y$ ).

$$\log_y y + \log_y x^{\log_y x} = \log_y x^{\frac{5}{2}}$$

$$1 + \log_y^2 x = \frac{5}{2} \log_y x$$

$$\log_y^2 x - \frac{5}{2} \log_y x + 1 = 0$$

Смјена :  $\log_y x = t$ .

$$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

Другу једначину можемо написати као:

$$\log_y (3x - y) = \log_y 4$$

$$3x - y = 4$$

а)  $3x - y = 4$

$$x = y^2$$

$$3y^2 - y - 4 = 0$$

$$y_1 = \frac{4}{3}, y_2 = -1$$

б)  $3x - y = 4$

$$x = \sqrt{y}$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2}$$

Рјешење је  $x = 16/9, y = 4/3$ .

Нема рјешења.

## 23. Ријешити систем једначина

$$2^{2x} \cdot 3^{2y+1} + 16 \cdot 2^{2y} = 48 \cdot 3^{2y}$$
$$2^x \cdot 3^y + 4 \cdot 2^y = 8 \cdot 3^y.$$

**Рјешење:** Подијелимо прву једначину са  $3^{2y}$ , а другу са  $3^y$ :

$$3 \cdot 2^{2x} + 16 \cdot \frac{2^{2y}}{3^{2y}} = 48$$

$$2^x + 4 \frac{2^y}{3^y} = 8$$

Уводимо смјене :  $u = 2^x, v = \frac{2^y}{3^y} = \left(\frac{2}{3}\right)^y$

$$3u^2 + 16v^2 = 48$$

$$u + 4v = 8 \Rightarrow u = 8 - 4v$$

$$3(8 - 4v)^2 + 16v^2 = 48 \Rightarrow 3v^2 - 12v + 9 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{3}{2} \Rightarrow u = 2$$

$$u = 2^x \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$v = \left(\frac{2}{3}\right)^y \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^y = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -1$$

Рјешење је:  $x = 1, y = -1$ .

## 24. Ријешити систем једначина

$$2\log x + \log y^2 = 4$$

$$\log \sqrt{5(x-5)} - \log \sqrt{3y-2} = 0.5$$

**Рјешење:**

Д.П.

$$\left. \begin{array}{l} x > 0, y > 0 \\ x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5 \\ 3y - 2 > 0 \Rightarrow y > \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow x > 5, y > \frac{2}{3}$$

$$2\log x + 2\log y = 4$$

$$\frac{1}{2}\log 5(x-5) - \frac{1}{2}\log(3y-2) = \frac{1}{2}$$

$$\log x + \log y = 2$$

$$\log 5(x-5) - \log(3y-2) = 1$$

$$\log xy = 2$$

$$xy = 100$$

$$\log \frac{5(x-5)}{3y-2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{5(x-5)}{3y-2} = 10$$

$$xy = 100$$

$$5x - 30y = 5$$

$$xy = 100$$

$$x = 6y + 1$$

$$\Rightarrow 6y^2 + y - 100 = 0 \Rightarrow y_1 = 4, y_2 = -\frac{25}{6} \text{ -не припада дефиниционом подручју}$$

$$x_1 = 25$$

Рјешење је (25,4).

## 5. АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

1. Наћи једначину правца који је окомит на правац  $2x-3y+4=0$  и на оси  $y$  има три пута већи одсјечак.

*Рјешење:*

$$\begin{aligned}y &= kx + n \\ -2x - 4 &= -3y \\ y &= \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}n \\ k &= -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}\end{aligned}\quad \begin{aligned}n &= 3\frac{4}{3} = 4 \\ y &= -\frac{3}{2}x + 4\end{aligned}$$

2. Дате су праве

$$\begin{aligned}ax - y &= 3b \\ x - 2by &= 1, \quad (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0).\end{aligned}$$

Одредити  $a$  и  $b$  тако да праве буду паралелне.

*Рјешење:*

$$\begin{aligned}y &= ax - 3b \Rightarrow k_1 = a \\ 2by &= x - 1 \Rightarrow y = (1/2b)x - (1/2b) \Rightarrow k_2 = 1/(2b)\end{aligned}$$

Из услова паралелности  $k_1 = k_2$  слиједи рјешење  $a = 1/(2b)$ .

3. За које се  $\alpha$  и  $\beta$  праве

$$\begin{aligned}\alpha x + 2y - 4 &= 0 \\ \beta x - 3y + 3 &= 0\end{aligned}$$

сијекну у првом квадранту ?

*Рјешење:*

Да би се праве сијекле у првом квадранту мора да вриједи:  $x > 0 \wedge y > 0$ .

$$\begin{aligned}x(3\alpha + 2\beta) &= 6 \\ x &= \frac{6}{3\alpha + 2\beta} > 0 \\ 3\alpha + 2\beta &> 0 \\ \alpha &> -\frac{2}{3}\beta\end{aligned}\quad \begin{aligned}\frac{6\alpha}{3\alpha + 2\beta} + 2y &= 4 \\ y &= \frac{3\alpha + 4\beta}{3\alpha + 2\beta} > 0 \\ 3\alpha + 4\beta &> 0 \\ \alpha &> -\frac{4}{3}\beta\end{aligned}$$

$$3\alpha \beta > 0 \Rightarrow \alpha > (-2/3)\beta.$$

$$3\alpha \beta < 0 \Rightarrow \alpha > (-4/3)\beta.$$

#### 4. Испитати положај праве према кружности:

a)  $x-y=3$   
 $x^2+y^2=25,$

b)  $y=x-m$   
 $x^2+y^2=m^2, (m \in \mathbb{R}).$

**Рјешење:**

a)  $x=y+3$   
 $(y+3)^2+y^2=25$   
 $y^2+3y-8=0$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

Из рјешења се види да права сијече кружницу.

б)  $x^2+(x-m)^2=m^2$

$$2x(x-m)=0$$

$$x_1=0, x_2=m$$

Ако је  $m=0$  права је тангента кружнице, а за остале  $m \in \mathbb{R}$  права сијече кружницу.

#### 5. Нацртати кружницу ( $k$ ) и правац ( $p$ )

$$x^2+y^2+10x=0 \text{ (} k \text{)}$$

$$x-2y=0 \text{ (} p \text{)}.$$

Наћи пресјечне тачке  $A$  и  $B$  правца ( $p$ ) и кружнице ( $k$ ) и наћи њихово растојање.

**Рјешење:**

$$(x+5)^2+y^2=25 \Rightarrow C(-5,0,5)$$

$$x=2y$$

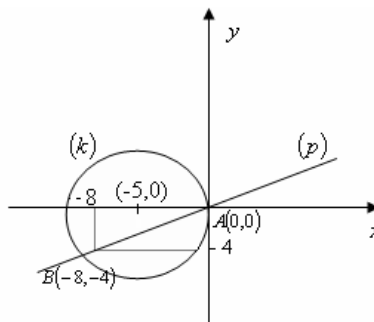
$$5y^2+20y=0 \Rightarrow y(y+4)$$

$$y_1=0 \wedge y_2=-4$$

$$x_1=0 \wedge x_2=-8$$

$$A(0,0), B(-8,-4)$$

$$d(A, B) = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$



#### 6. Дате су кружница ( $k$ ) и права ( $p$ )

$$x^2+y^2-2x=0 \text{ (} k \text{)}$$

$$x+ty+1=0 \text{ (} p \text{)}.$$

a) Одредити све вриједности параметра  $t$  за које кружница ( $k$ ) и права ( $p$ ) немају заједничких тачака.

б) за  $t = \frac{1}{2}$  нацртати слику.

**Рјешење:**

a)  $(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow C(1,0,1)$

$$x=-ty-1$$

$$(-ty-1)^2+y^2-2(-ty-1)=0$$

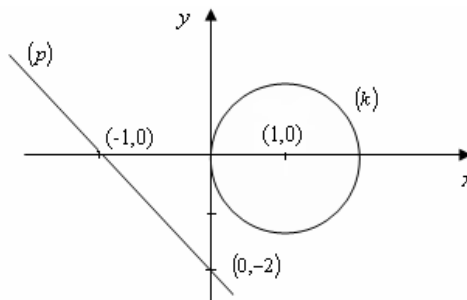
$$(t^2+1)y^2+4ty+3=0$$

Да права и кружница немају заједничких тачака мора бити задовољено  $D < 0$ , тј.

$$16t^2 - 12(t^2 + 1) < 0$$

$$t^2 - 3 < 0 \Rightarrow (t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3}) < 0$$

$$t \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$



$$\begin{aligned}
\text{б) } & (x-1)^2 + y^2 = 1 \\
& x + y/2 + 1 = 0 \\
& 2x + y + 2 = 0 \\
& y = 0 \Rightarrow x = -1 \\
& x = 0 \Rightarrow y = -2
\end{aligned}$$

7. Стране троугла леже на правцима  $2x-3y+6=0$ ;  $3x+2y-12=0$ ;  $4x-y+8=0$ .

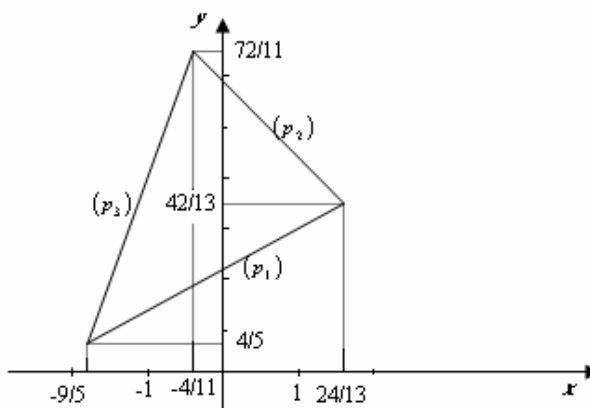
а) Одредити координате врхова троугла.

б) Наћи све тачке  $M(x,y)$  унутар датог троугла, при чему су  $x$  и  $y$  цијели бројеви.

**Рјешење:**

а) Координате врхова добијају се као пресеци заданих праваца:

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} p_1 = 2x - 3y + 6 = 0 \\ p_2 = 3x + 2y - 12 = 0 \end{aligned} \right\} & \Rightarrow A\left(\frac{24}{13}, \frac{42}{13}\right) \\
\left. \begin{aligned} p_1 = 2x - 3y + 6 = 0 \\ p_3 = 4x - y + 8 = 0 \end{aligned} \right\} & \Rightarrow B\left(-\frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right) \\
\left. \begin{aligned} p_2 = 3x + 2y - 12 = 0 \\ p_3 = 4x - y + 8 = 0 \end{aligned} \right\} & \Rightarrow C\left(-\frac{4}{11}, \frac{72}{11}\right)
\end{aligned}$$



б) Унутрашњост троугла је скуп  $E \subset \mathbb{R}^2$ :

$$E = \{(x, y) : (2x - 3y + 6 < 0) \wedge (3x + 2y - 12 < 0) \wedge (4x - y + 8 > 0)\}.$$

$$-\frac{9}{5} < x < \frac{24}{13}, \quad \frac{4}{5} < y < \frac{72}{11}, \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

$$x \in \{-1, 0, 1\}, \quad y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Од ових координата се може формирати 18 тачака, а непосредним провјеравањем се одбацују оне које не леже у унутрашњости троугла. Тако се добије сљедећих 7 тачака:

$$M_1(-1, 2), M_2(-1, 3), M_3(0, 3), M_4(0, 4), M_5(0, 5), M_6(1, 3), M_7(1, 4).$$

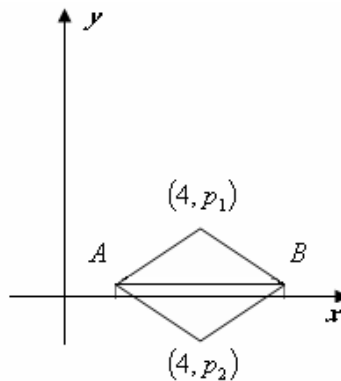
8. Врхови троугла налазе се у тачкама  $A(1,1)$ ,  $B(8,1)$ ,  $C(4,p)$ . Одредити све вриједности параметра  $p$  тако да површина  $P$  троугла  $ABC$  задовољава неједначину  $6 \leq P < 10$ .

**Рјешење:**

а)

$$P = \frac{ah}{2} = \frac{(8-1)(p_1-1)}{2} = \frac{7}{2}(p_1-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{7}{2}(p_1-1) \geq 6 & \Rightarrow p_1 \geq \frac{19}{7} \\ \frac{7}{2}(p_1-1) < 10 & \Rightarrow p_1 < \frac{27}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{19}{7} \leq p_1 \leq \frac{27}{7}$$



б)

$$P = \frac{ah}{2} = \frac{(8-1)(1+|p_2|)}{2} = \frac{7}{2}(1+|p_2|)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{7}{2}(1+|p_2|) \geq 6 \Rightarrow |p_2| \geq \frac{5}{7} \\ \frac{7}{2}(1+|p_2|) < 10 \Rightarrow |p_2| < \frac{13}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{13}{7} < p_2 \leq -\frac{5}{7}$$

9. Одредити једначину праве  $p$  која пролази кроз тачке  $A(1,3)$  и  $B(2,-2)$ . Одредити једначину праве  $s$  која је окомита на праву  $p$  и пролази кроз тачку  $C(5,5)$ . Нацртати обје праве.

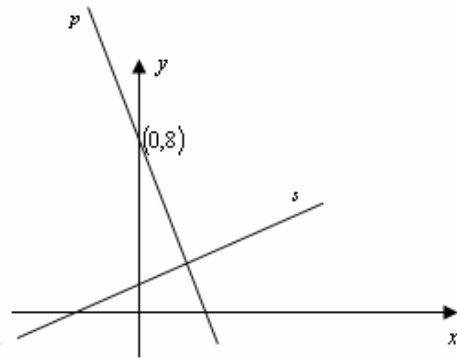
**Рјешење:**

$$p: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{-2 - 3}{2 - 1}(x - 1) \Rightarrow y = -5x + 8 \Rightarrow k_1 = -5$$

$$s \perp p \Rightarrow k = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{5}$$

$$s: y - 5 = \frac{1}{5}(x - 5) \Rightarrow 5y - x - 20 = 0.$$



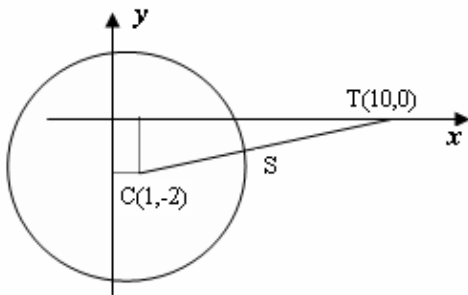
10. Дата је кружница  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ . Одредити растојање тачке  $T(10,0)$  од дате кружнице. Нацртати кружницу.

**Рјешење:**

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25, C(1,-2), r=5$$

Растојање се рачуна до најближе тачке на кружници, нека је то тачка  $S$ .

$$d = \overline{ST} = \overline{CT} - r = \overline{CT} - 5 = \sqrt{(10-1)^2 + (0+2)^2} - 5 = \sqrt{85} - 5$$

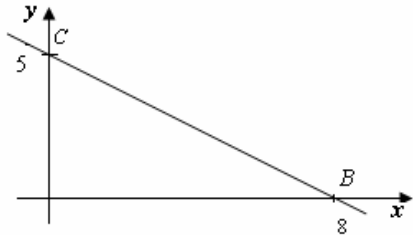




11. Врхови троугла налазе се у тачкама  $A(0,0)$ ,  $B(8,0)$  и  $C(0,6)$ . Одреди све тачке у унутрашњости троугла које имају цјелобројне координате.

**Рјешење:**

Треба да одредимо једначину правца  $y=ax+b$  који пролази кроз тачке  $B$  и  $C$ , а затим за тачке  $x_i=1,2,3,4,5,6,7$  одредити све цијеле бројеве који су мањи од  $y_i=y(x_i)$



$$p: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}(x - 8)$$

Сада уврштавамо “унутрашње” апсцисе

$x_i$	$y_i$	$b$
1	21/4	1 2 3 4 5
2	9/2	1 2 3 4
3	15/4	1 2 3
4	3	1 2
5	9/4	1 2
6	3/2	1
7	3/4	нема

$T_1(1,1), T_2(1,2), T_3(1,3), T_4(1,4), T_5(1,5)$

$T_6(2,1), T_7(2,2), T_8(2,3), T_9(2,4), T_{10}(3,1), T_{11}(3,2), T_{12}(3,3)$

$T_{13}(4,1), T_{14}(4,2), T_{15}(5,1), T_{16}(5,2), T_{17}(6,1)$

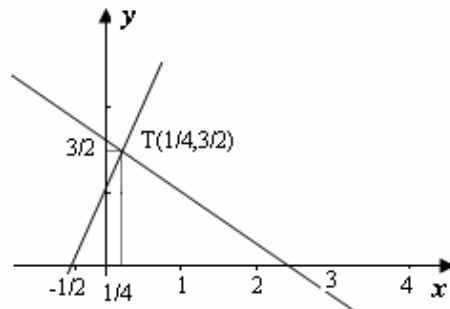
12. Одреди пресјечну тачку  $T$  правца  $2x+3y-5=0$  и  $4x-2y+2=0$ . Одреди растојање тачке  $T$  од координатног почетка.

**Рјешење:**

$$\left. \begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ 4x-2y=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

$$d(T,0) = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{4}$$



13. Израчунати површину троугла чија се два врха налазе у тачкама  $A(0,0)$ ,  $B(10,0)$ , а трећи врх се налази у центру кружнице чија је једначина  $x^2+y^2-10x-10y+25=0$ .

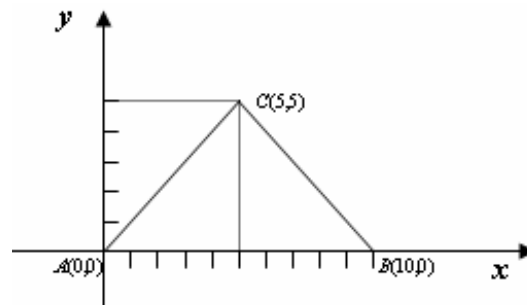
**Рјешење:**

$$(x-5)^2-25+(y-5)^2-25+25=0$$

$$(x-5)^2+(y-5)^2=25$$

$$C(5,5), r=5$$

$$P = \frac{ah}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$$



14. Тачке  $A$  и  $B$  дате су као пресједи два правца:

$$A: \begin{cases} x+2y-6=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \quad B: \begin{cases} 3x-2y-3=0 \\ x-3y+6=0 \end{cases}$$

Одредити тачке  $A$  и  $B$  и њихово растојање.

*Рјешење:*

$$A: \begin{cases} x+2y=6 \\ 2x-y=2 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=2 \quad B: \begin{cases} 3x-2y=3 \\ x-3y=-6 \end{cases} \Rightarrow x=3, y=3$$

$$A(2,2) \quad B(3,3)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

15. Одредити растојање тачака  $C_1$  и  $C_2$ , гдје је  $C_1$  центар кружнице чија је једначина  $x^2+y^2+x-3y+1/4=0$ , а  $C_2$  центар кружнице чија је једначина  $x^2+y^2-5x-2y-7/4=0$ .

*Рјешење:*

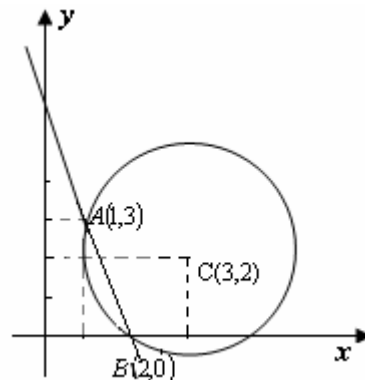
$$\begin{aligned} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} &= 0 & \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + (y-1)^2 - 1 - \frac{7}{4} &= 0 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} & \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + (y-1)^2 &= \frac{36}{4} \\ C_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) & & C_2\left(\frac{5}{2}, 1\right) & \end{aligned}$$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

16. Права  $3x+y-6=0$  сијече кружницу  $x^2+y^2-6x-4y+8=0$ . Одредити дужину тетиве и нацртати слику.

*Рјешење:*

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 5 \\ y &= 6-3x \\ x^2 - 6x + 9 + (6-3x)^2 - 4(6-3x) + 4 &= 5 \\ 10x^2 - 30x + 20 &= 0 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \\ x_1 &= 1, x_2 = 2 \\ y_1 &= 3, y_2 = 0 \\ A(1,3), B(2,0) & \\ d(A, B) &= \sqrt{(2-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$



17. Наћи растојање пресјечне тачке правих  $x+y-2=0$  и  $2x+3y-6=0$  и центра кружнице  $x^2+y^2-6x+4y+9=0$ .

**Рјешење:**

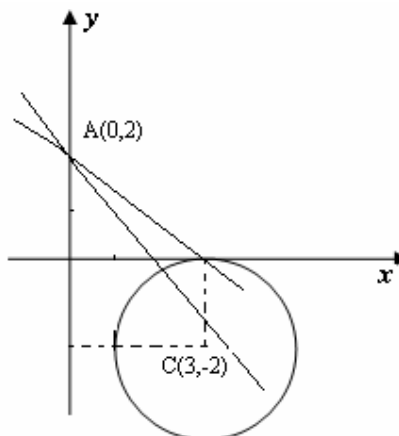
$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=6 \end{cases} \Rightarrow x=0, y=2$$

$$A(0,2)$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$C(3,-2)$$

$$d(A,C) = \sqrt{3^2 + (-2-2)^2} = 5$$



18. Одреди растојање тачке  $A(5,5)$  од правца који пролази кроз тачке  $B(0,-2)$  и  $C(-2,0)$ .

**Рјешење:**

Први начин рјешавања

Користимо формулу за удаљеност тачке од праве  $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Једначина праве кроз тачке В и С је

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

$$y = \frac{2}{-2}(x+2) \Rightarrow y = -x - 2 \Rightarrow x + y + 2 = 0$$

$$d = \frac{|5 + 5 + 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Други начин рјешавања је да нађемо и праву која пролази кроз тачку А, а окомита је на праву која пролази кроз тачке В и С, а затим нађемо њихову пресјечну тачку D и онда је удаљеност тачке А од праве уствари удаљеност од тачке А до тачке D.

права BC је  $y = -x - 2$

права која пролази кроз А и окомита на BC је  $y - 5 = x - 5 \Rightarrow y = x$

јер је  $k = 1$ ,

пресјек правих:

$$y = x$$

$$y = -x - 2 \Rightarrow x = -1, y = -1$$

тј. D(-1,-1)

$$d(A,D) = \sqrt{(-1-5)^2 + (-1-5)^2} = 6\sqrt{2}$$

## 6. ЗАДАЦИ ЗА ВЈЕЖБУ

1. Одредити вриједност израза

$$\frac{\left(a^2 - \frac{1}{b^2}\right)^a \left(b + \frac{1}{a}\right)^{b-a}}{\left(b^2 - \frac{1}{a^2}\right)^b \left(a - \frac{1}{b}\right)^{a-b}}, \text{ за } a=2, b=1. \quad (\text{P: } 8)$$

2. Упростити израз

$$(x^2 - 100) : \left( \frac{5}{x^2 - 4} - \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{3}{(x+2)^2} \right). \quad (\text{P: } 1/4(x+10)(x^2-4)^2)$$

3. Упростити израз

$$\frac{4 - \frac{4+a^2}{a}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{a}} : \left( \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a+2} \right). \quad (\text{P: } -\frac{(a-2)^3}{a})$$

4. Упростити израз

$$\left( \frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} \right)^{-2} \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{a}{x} + \frac{a}{x}}}, \quad (a > 0, x > 0, a \neq x). \quad (\text{P: } \sqrt{ax} + a)$$

5. Упростити израз

$$A = \left( \frac{\sqrt[4]{x^3} - 8}{\sqrt[4]{x} - 2} + 2\sqrt[4]{x} \right)^{0.5} \left( 4x - \sqrt{x^3} \right)^{-1} \left( \frac{\sqrt[4]{x^3} + 8}{\sqrt[4]{x} + 2} - x^{0.5} \right) \quad (\text{P: за } x \in (0,16) \cup (16,+\infty), A = \frac{2}{x})$$

6. Ријешити једначине:

$$\text{a) } \frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3$$

$$\text{б) } \frac{2x+a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{3ax+(a-b)^2}{ab}. \quad (\text{P: a) } x = -\frac{9}{2}; \text{ б) } x=2b, \text{ за } a \neq b, a, b \neq 0)$$

7. Ријешити системе једначина:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + my = m + 5 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x^2 + 5xy - 18y^2 = 0 \\ xy + y^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$(\text{P: a) } x = \frac{3m-25}{2m-15}, y = \frac{2(m-7)}{2m-15}, \text{ за } m \neq \frac{15}{2}; \text{ б) } (4,2), (-4,-2))$$

8. Ријешити систем неједначина

$$0.4x + \frac{7}{3} < \frac{2}{3}x - 1.2$$

$$5x + 17 > 9x - 63.$$

$$(\text{P: } \frac{53}{4} < x < 20)$$

9. Ријешити неједначину

$$\frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 - x - 1} > 1 .$$

$$(P: x \in \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, 2) )$$

10. Ријешити неједначину

$$\frac{|3|x|+2|}{|x-1|} < 3 .$$

$$(P: x \in \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) )$$

11. Ријешити системе једначина:

$$\text{а) } \begin{cases} |2x-1| - y = 2 \\ x - |4-y| = -1 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} |x-2| + y + 3 = 7 \\ x - 2 - |y+3| = -1 . \end{cases}$$

$$(P: \text{ а) } (2,1), (8,13); \text{ б) } (5,1) )$$

12. Дата је једначина  $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$  .Одредити параметар  $m$  тако да збир квадрата њених рјешења буде једнак 52.

$$(P: m_1 = \frac{32}{25}, m_2 = 3 )$$

13. За које реалне вриједности параметра  $a$  неједначина

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 2 , \quad \text{вриједи } \forall x \in \mathbb{R} ?$$

$$(P: a \in (0,4) )$$

14. Ријешити једначине:

$$\text{а) } 0.5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$$

$$\text{б) } 3^x - 3^{x-1} = 2 \cdot 9^{x-2} .$$

$$(P: \text{ а) } x_1 = -2, x_2 = 4 ; \text{ б) } x=3 )$$

15. Ријешити неједначину

$$3 \cdot 5^x + 5^{x-1} < 50 \cdot 2^x .$$

$$(P: x < 3 )$$

16. Ријешити једначине:

$$\text{а) } 2 \log(x-2) - \log(2x-3) = 2 \log 4 - \log 9$$

$$\text{б) } \log(7x+5) + \log(2x+7) = \log 9 + \log 12$$

$$\text{в) } \log_2 \log_3(2x+3) + \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{2x+3} = 1$$

$$\text{г) } 2 \log_4(2^x - 1) + x + \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{\sqrt{6}}{6}} 6 = 0 .$$

$$(P: \text{ а) } x=6; \text{ б) } x=1; \text{ в) } x = \sqrt{2} ; \text{ г) } x=2 )$$

17. Ријешити неједначине:

$$\text{а) } \log_2 \left( x^2 - x - \frac{3}{4} \right) < \log_2 5 - 2$$

$$\text{б) } \log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$$

$$\text{в) } \log \frac{|x^2 - 2x| + 4}{|x + 2| + x^2} \leq 0.$$

$$(\text{P: а) } x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right); \text{ б) } x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, 2); \text{ в) } \left[\frac{1 + \sqrt{7}}{4}, +\infty\right))$$

18. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned} \log x + \log y &= 2 \\ \log \sqrt{5(x-5)} - \log \sqrt{3y-2} &= 0.5. \end{aligned} \quad (\text{P: } (25, 4))$$

19. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned} 2^{x+y-1} + 2^{x-y+1} &= 3 \\ \frac{1}{7} 3^{x \log_3 2 + y \log_3 2 - 2} + 3^{x \log_3 2 - y \log_3 2 - 2} &= \frac{1}{7} \end{aligned} \quad (\text{P: } (1/2, 1/2))$$

20. Доказати идентитет

$$3 \left[ \sin^4 \left( \frac{3\pi}{2} - x \right) + \sin^4 (3\pi + x) \right] - 2 \left[ \sin^6 \left( \frac{\pi}{2} + x \right) + \sin^6 (5\pi - x) \right] = 1.$$

21. Упростити израз

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \quad (\text{P: } \frac{1}{2} \operatorname{tg} x)$$

22. Ријешити једначине:

$$\text{а) } 3 \sin^2 x - (3 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \quad (\text{P: } x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{3} \sin x + \cos x &= -1, \\ (\text{Упутство: смјена: } \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= t) \end{aligned} \quad (\text{P: } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{в) } 1 - \cos(\pi - x) + \sin \frac{\pi + x}{2} = 0 \quad (\text{P: } x = \pi + 2k\pi, x = \pm \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{г) } \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x = 0 \quad (\text{P: } x = (2k+1) \frac{\pi}{10}, k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{д) } \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin 3x \quad (\text{P: } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5})$$

$$\text{ђ) } 16^{\sin x} = \cos \sqrt{4} \quad (\text{P: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi)$$

$$\text{е) } \log_{\cos x} (\sin x) + \log_{\sin x} (\cos x) - 2 = 0. \quad (\text{P: } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$$

23. Ријешити неједначине:

$$\text{а) } \cos^2 x - \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cos x < \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (\text{P: } \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$$

$$\text{б) } 6 \cos^2 x - 11 \cos x + 4 > 0. \quad (\text{P: } \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi)$$

24. Одредити параметар  $k$  тако да права  $y = kx + 1$  додирује кружницу  $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ .

$$(P: k_1 = 0, k_2 = \frac{4}{3})$$

25. На правој  $(p)$   $3x + 4y - 12 = 0$  наћи тачку једнако удаљену од тачака  $A(-2, -1), B(4, 1)$ .

$$(P: M(0, 3))$$

26. Једначине двије стране паралелограма су  $8x + 3y + 1 = 0$  и  $2x + y - 1 = 0$ , а једначина једне његове дијагонале је  $3x + 2y + 3 = 0$ . Одредити координате врхова паралелограма.

$$(P: (-1, 3), (-2, 5), (5, -9), (8, -17))$$

27. Написати једначину кружнице описане око троугла чија су тјемева дата са:  $A(7, 7), B(0, 8), C(-2, 4)$ .

$$(P: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25)$$

28. Дата су два тјемева једнакокраког троугла  $A(1, -4), B(7, -2)$ , а треће тјеме  $C$  припада правој  $x - y + 1 = 0$ .

Одредити координате тјемева  $C$ .

$$(R: C(2, 3))$$

29. Одредити једначину кружнице чији се центар налази у пресјеку правих линија :

$$2x + y - 15 = 0 \text{ и } x - 3y + 17 = 0, \text{ а садржи тачку } A(9, -5).$$

$$(R: C(4, 7), r = 13)$$

30. У једначини праве  $mx + (m + 7)y - 48 = 0$  одредити  $m$  тако да њено растојање од тачке  $A(2, 1)$  буде 2.

$$(R: m_1 = 5, m_2 = 297)$$

31. Одредити једначине висина троугла чије су стране дате једначинама :

$$BC: 3x - y - 18 = 0$$

$$CA: x - y - 2 = 0$$

AB:  $x + 2y + 1 = 0$ , а затим одредити ортоцентар.

$$(P: h_a: x + 3y + 2 = 0; h_b: x + y - 2 = 0; h_c: 2x - y - 10 = 0; O(4, -2))$$

32. Из тачке  $A(6, 4)$  конструисане су нормале на праве  $3x + y + 8 = 0$  и  $x + 2y + 6 = 0$ . Израчунати површину троугла чија су тјемева тачка  $A$  и подножја нормала.

$$(R: P = 30)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Вулетић, Б. Гаковић, Ј. Јенчирагић: *Збирка ријешених задатака из математике*
2. В. Богославов: *Збирка ријешених задатака из математике за II разред*
3. В. Богославов: *Збирка ријешених задатака из математике за III разред*
4. С. Прешић, Б. Алимпић: *Збирка задатака из математике за I разред*
5. С. Минтаковић: *Збирка задатака из математике за I и II разред*
6. Р. Живковић: *Збирка задатака из математике за II разред*
7. И. Катић: *Збирка задатака из математике са рјешењима и упутама за I разред*